Διάλεξη 5η ①
21/10/2019

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Άσκηση

Δίνεται η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $c(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t), t\in\mathbb{R}$

i) Είναι κανονική;

ii) Βρείτε το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$

iii) Να γίνει αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου.

iv) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της συνάρτησης του t, και του μήκους τόξου

v) Σχεδιάζουμε όλες οι εφαπτόμενες το επίπεδο;

Λύση

i) $c'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$

$\|c'(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2} = e^t\sqrt{2} > 0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Άρα η c κανονική.

ii) Το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$ είναι η συνάρτηση

$S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $S=S(t)=\int_0^t \|c'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^u\Big|_0^t$

$\Rightarrow S=\sqrt{2}(e^t-1)$

iii) $S=\sqrt{2}(e^t-1) \Leftrightarrow e^t-1=\frac{S}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^t = \frac{S}{\sqrt{2}}$ $\overset{S>-\sqrt{2}}{\Leftrightarrow}$

$t=\log\left(\frac{S}{\sqrt{2}}+1\right), S>-\sqrt{2}$

Η αναπαραμέτρηση της c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη $c(-\sqrt{2},\infty)\to\mathbb{R}^2$

$c(s)=c\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)=\Bigg(\underbrace{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)}_{X(s)}, \underbrace{\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\left(\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)}_{y(s)}\Bigg)$

iv) $c(s)=(x(s),y(s))$

$k(s)=\dot{x}(s)\ddot{y}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s)$

$c(t)=(x(t),y(t))$, $k(t)=\dfrac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\|c'(t)\|^3}$

$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t) \Rightarrow x''(t)=e^t(\cos t-\sin t-\sin t-\cos t)$
$= -2e^t\sin t$

$y'(t)=e^t(\cos t+\sin t) \Rightarrow y''(t)=e^t(\cos t+\sin t-\sin t+\cos t)$
$=2e^t\cos t$

Αρα $$\kappa(t) = \frac{1}{(\sqrt{2}\, e^{t})^{3}} \Big(2\, e^{2t}(\cos t - \sin t)\cos t + 2e^{-2t} \cdot (\cos t + \sin t)\sin t \Big)$$

$$= \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2}\, e^{3t}} \left((\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t + \ldots + \sin^2 t \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\, e^{t}}}$$

Η καμπυλότητα ως συν/ση της φυσικής παραμέτρου είναι:

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)} = \frac{1}{s+\sqrt{2}}, \quad s > -\sqrt{2}$$

v) $t \in \mathbb{R}$: Η εφαπτόμενη ευθεία της c στο t διέρχεται απ' το σημείο $c(t)$ και είναι $\parallel c'(t)$. Άρα η διανυσματική της είναι $\vec{r} = c(t) + \lambda c'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες καλύπτουν του $\mathbb{R}^2$ τότε θα υπάρχει $t, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $0 = c(t) + \lambda c'(t)$ όμως $c(t), c'(t)$ γρ. εξαρτ.

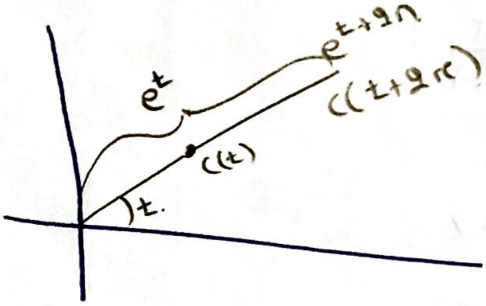
$$\begin{vmatrix} e^{t}\cos t & e^{t}\sin t \\ e^{t}(\cos t - \sin t) & e^{t}(\cos t + \sin t) \end{vmatrix} = e^{2t}(\cos^2 t + \cos t \sin t - \sin t \cos t + \sin^2 t)$$

$$= e^{2t} > 0$$, άτοπο

Δεν καλύπτουν όλο το επίπεδο.

Μιγαδικός χώρος:

$$c(t)=e^t(\cos t + i\sin t)$$



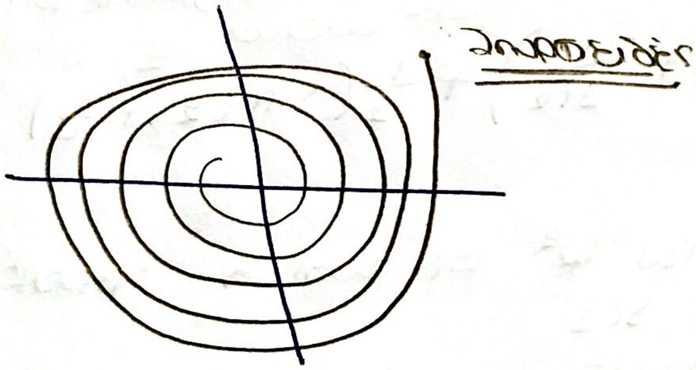
$c(t_1)=c(t_2) \Rightarrow \|c(t_1)\|=\|c(t_2)\| \Rightarrow e^{t_1}=e^{t_2} \Rightarrow t_1=t_2$

$\Rightarrow$ Δεν έχει αυτοτομές

$\lim_{t\to+\infty} c(t)=+\infty$, $\lim_{t\to-\infty} c(t)=(0,0)$

(Δεν θα γίνει ποτέ μηδέν)

Σχηματικά:



Άσκηση: Να βρεθεί καμπύλη c του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο τ.ω. $c(0)=(1,1)$, $\vec{t}(0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και καμπυλότητα $\kappa(s)=2$, $\forall s$.

Λύση

$\vec{t}(0)=\dot{c}(0)$

$c(s)=(x(s),y(s))$ $\quad \kappa(s)=\dot{\phi}(s) \Leftrightarrow \dot{\phi}(s)=2 \Rightarrow$

$\begin{cases} \dot{c}(s)=(\dot{x}(s),\dot{y}(s)) \\ \dot{c}(s)=(\cos\phi(s),\sin\phi(s)) \end{cases}$ $\quad \int_0^s \dot{\phi}(u)\,du=\int_0^s 2\,du \Rightarrow$

$\phi(s)-\phi(0)=2s \Rightarrow \phi(s)=2s+\phi(0)$

$$\dot{c}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos\phi(0), \sin\phi(0))$$

Μπορώ να θεωρήσω ότι $\phi(0) = \frac{\pi}{4}$

Άρα $\phi(s) = 2s + \frac{\pi}{4}$

$$\dot{c}(s) = \left(\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^s \dot{c}(u)du = \frac{1}{2}\left(\int_0^s 2\cos\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du, \int_0^s 2\sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)du\right)$$

$$\Leftrightarrow c(s) - c(0) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^s, -\cos\left(2u + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^s\right)$$

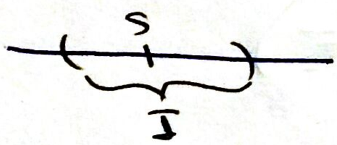
$$c(s) = (1,1) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(*) Η καμπύλη γεωμετρικά είναι κύκλος με ακτίνα $\frac{1}{2}$

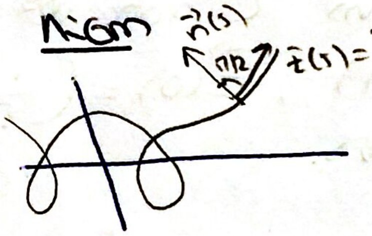
$$c(s) = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(2s + \frac{\pi}{4}\right), -\cos\left(2s + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Άσκηση

Μια καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο s, δίνεται $\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)$, $s \in I$. Τι συμπεράσματα εξάγονται για την καμπύλη;



Λύση



$$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s) \Rightarrow$$

$$J\vec{n}(s) = J^2\vec{t}(s)$$

$$\xrightarrow{J^2 = -Id} J\vec{n}(s) = -\vec{t}(s) \Leftrightarrow \vec{t}(s) = -J\vec{n}(s)$$

$$J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$$

$$J\vec{n}(s) = J(-\sin s, \cos s) = -(\cos s, -\sin s)$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{t}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow \dot{c}(s) = (\cos s, \sin s)$

$\Rightarrow \int_{s_0}^{s} \dot{c}(u)du = \left(\int_{s_0}^{s} \cos u\, du , \int_{s_0}^{s} \sin u\, du \right) \Leftrightarrow$

$c(s) - c(s_0) = \left(\sin u \Big|_{s_0}^{s} , -\cos u \Big|_{s_0}^{s} \right) \Rightarrow$

$c(s) = c(s_0) + (\sin s - \sin s_0, -\cos s + \cos s_0)$

(*) Γεωμετρικά η καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας 1

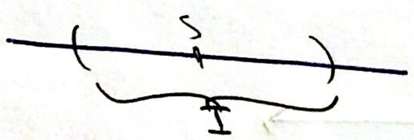
$\vec{t}(s) = (\cos s, \sin s)$

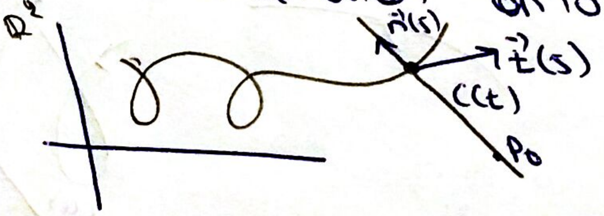
$\dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s) \Rightarrow \kappa(s) = 1$

Άσκηση: Να βρεθούν όλες οι ομαλές καμπύλες των οποίων όλες οι εφαπτόμενες (κάθετες) ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Έστω $c(s)$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$, τ.ω. όλες οι κάθετες ευθείες της να διέρχονται από το σημείο P_0.





Η κάθετη ευθεία της c στο s έχει διανυσματική εξίσωση: $\vec{r} = c(s) + \lambda \vec{n}(s)$. Από υπόθεση έχω ότι

$(\forall s \in I)\ (\exists\ \lambda = \lambda(s))$ ώστε $\boxed{\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s),\ \forall s \in I}$ (*)

$\langle \vec{OP_0}, \vec{n}(s) \rangle = \langle c(s), \vec{n}(s) \rangle + \lambda(s) \langle \vec{n}(s), \vec{n}(s) \rangle$

$\Rightarrow \lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec{n}(s) \rangle - \langle c(s), \vec{n}(s) \rangle$

$\Rightarrow \lambda(s)$ είναι λεία.

θα διαφορίσω και θα πρέπει να είναι και συνεχώς διαφορ.

Παραγωγίζω την (*) $\quad 0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s)$

$$0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s) \xRightarrow{\dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t}}$$

$$0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\lambda(s) - \lambda(s)\kappa(s)\vec{t}(s) \iff$$

$$0 = (1 - \lambda(s)\kappa(s))\vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s), \quad \forall s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda(s)\kappa(s) = 0 & \Rightarrow \kappa(s) = \dfrac{1}{\lambda}, \ \lambda \neq 0 \\ \dot{\lambda}(s) = 0 & \overset{\forall s}{\Longrightarrow} \lambda(s) = \text{σταθ} = \lambda \end{cases}$$

$$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda\vec{n}(s) \iff c(s) - \vec{OP_0} = -\lambda\vec{n}(s)$$

$$\Rightarrow \| c(s) - \vec{OP_0} \| = |\lambda| \Rightarrow d(c(s), P_0) = |\lambda| \ (\text{κύκλος})$$

Άσκηση: Δίνεται καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο $s \in I$. Υποθέτουμε ότι $\exists\, s_0 \in I$ τ.ω η απόσταση $d(0, c(s))$ του τυχόντος σημείου της c από το 0 να λαμβάνει την μέγιστη τιμή για $s = s_0$. Νδο η καμπυλότητα της καμπύλης, πληροί την ανισότητα $|\kappa(s_0)| \geq \kappa_0 > 0$, όπου κ_0 είναι η καμπυλότητα κύκλου θετικού προσαν. κέντρου 0 ο οποίος διέρχεται από το σημείο $c(s_0)$.

Απόδ

$$d(0, c(s)) = \|c(s)\| = \sqrt{\langle c(s), c(s)\rangle}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(s) = (d(0, c(s)))^2 = \langle c(s), c(s)\rangle$

Από υπόθεση η $f(s)$ λαμβάνει μέγιστο στο $s_0 \in I$

Η $f(s)$ είναι διαφορίσιμη.

Από Θ. Fermat έχω ότι $\dot{f}(s_0) = 0$.

Και $\ddot{f}(s_0) \leq 0$.

$\dot{f}(s) = 2\langle c(s), \dot{c}(s)\rangle$, $\ddot{f}(s) = 2\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s)\rangle + 2\langle c(s), \ddot{c}(s)\rangle$

$$\Rightarrow \ddot{f}(s) = 2 + 2\langle c(s), \dot{\vec{t}}(s)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{f}(s) = 2\left(1 + \kappa(s)\langle c(s), \vec{n}(s)\rangle\right)}$$

$\dot{f}(s_0) = 0 \Leftrightarrow \langle c(s_0), \dot{c}(s_0)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle c(s_0), \vec{t}(s_0)\rangle = 0$

$$\Rightarrow \vec{n}(s_0) = \pm \frac{c(s_0)}{\|c(s_0)\|}.$$

Επίσης $\ddot{f}(s_0) \leq 0 \Leftrightarrow 1 + \kappa(s_0)\langle c(s_0), \vec{n}(s_0)\rangle \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 \pm \kappa(s_0)\left\langle c(s_0), \frac{c(s_0)}{\|c(s_0)\|}\right\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \pm \kappa(s_0)\left\langle c(s_0), \frac{c(s_0)}{\|c(s_0)\|}\right\rangle \leq 0 \Leftrightarrow 1 \pm \kappa(s_0)\|c(s_0)\| \leq 0$$

$$\Rightarrow |\kappa(s_0)| \geq \frac{1}{\|c(s_0)\|} = \kappa_0. \;//$$